Aplicación de la función Cobb-Douglas: secado de yuca en la costa atlántica de Colombia

ANTONIO MARTÍNEZ REINA*

Basado en la teoría neoclásica de la función de producción Cobb-Douglas, de 1934, se demuestra la aplicación de ésta a un caso práctico: el secado de yuca en los departamentos de Córdoba y Sucre en la costa atlántica de Colombia, sustentado en los datos del trabajo de campo realizado en 30 plantas. La información para construir la función de costos versó sobre la materia prima (yuca seca), maquinaria y equipo, personal permanente, empaques, administración, transporte interno, fletes, impuestos, imprevistos, servicios.

Se parte del supuesto de la minimización de los costos y la racionalidad del productor. Apoyados en este principio se formuló la función de costos de producción que muestra los componentes constitutivos y los respectivos aportes que cada elemento hace al costo total. La determinación de un costo mínimo está acompañada de un máximo en la función de producción, lo que genera aumentos en la producción cada vez que se utilizan unidades adicionales de factores de producción o cada vez que se aumenta la escala de producción.

* Director de Planeación de la Corporación Colombiana de Investigación Agropecuaria <antoniomarti40@hotmail.com>.

MODELO TEÓRICO

La explicación de los costos del secado de yuca se basa en la teoría neoclásica de la función de producción del tipo de Cobb-Douglas que relaciona la cantidad de insumos utilizados en la producción y permite calcular los montos máximos de producto que se pueden obtener con determinado volumen de los primeros.

Matemáticamente se puede representar así:

$CT = F(K,L) = AK^aL^b$

donde: CT = costo total; K y L = factores de capital y trabajo, respectivamente; a y b = parámetros que indican la elasticidad con respecto a los dos factores, es decir, el cambio que experimenta el costo total cuando cambian las unidades de los factores capital y trabajo.

Con apoyo en este principio se formuló la función de costos de producción que muestra los componentes constitutivos y los respectivos aportes que cada elemento hace al costo total.

Con el objeto de determinar la función de costos en el secado de yuca se formuló el siguiente modelo:

Costo total = C(1) + C(2)*MTPRI2 + C(3)*ENTREP +C(4)*LABOR + C(5)*PROD

donde costo total es el costo en pesos colombianos de producir una tonelada de yuca seca.

C (1) = intercepto, no tiene significado económico.

C (2) MTPRI2 = costo de la materia prima, es decir, la yuca fresca que se utiliza para obtener una tonelada de yuca seca que se calcula en 2.5 toneladas en una relación de 1:2.5, es decir, que para producir una tonelada de yuca seca se requieren 2.5 toneladas de yuca fresca.

C (3) ENTREP = costos por concepto de servicios, incluida la administración.

C (4) LABOR = costos de la mano de obra, incluidas jornadas y personal permanente.

MATERIALES Y MÉTODOS

El método de estimación utilizado fue el de los mínimos cuadrados con un coeficiente de determinación 0.350790 con un nivel de significancia 0.02432, lo que quiere decir que las variables empleadas para explicar el costo son suficientes y por tanto el modelo es consistente. Los coeficientes reúnen las características de ser insesgados, tener varianza mínima y presentar homocedasticidad, aptos para garantizar una buena estimación del modelo.

Los resultados de la regresión (empleando un programa de cómputo) se presentan en el cuadro.

RESULTADOS Y EXPOSICIÓN

Como resultado de la estimación de los datos por el método de los mínimos cuadrados se presenta las siguiente función:

Costo total = 1.73770458 + 0.8273316518*MTPRI2 + 0.008831087031*ENTREP +0.1211381115*LABOR + 0.0232822648*PROD

RESULTADOS DEL ANÁLISIS DE REGRESIÓN

Variable dependiente: LTOTAL
Método: mínimos cuadrados
Muestra actual: de 1 a 30
Número de observaciones: 30

Variable	Coeficiente	Error estándar	Estadístico -t	Probabilidad
C	1.737705	3.452541	0.503312	0.6192
LMTPRI2	0.827332	0.287702	2.875652	0.0081
LENTREP	0.008831	0.004170	2.117532	0.0443
LLABOR	0.121138	0.044157	2.743364	0.0111
LPROD	0.023282	0.021342	1.090937	0.2857
R-cuadrada	0.350790	Media de la variable dependiente		12.49249
R-cuadrada ajustada	0.246917	Desviación estándar de la variable dependiente		0.088485
Error estándar de la regresión	0.076788	Criterio Akaike		−2.144532
Suma de los errores al cuadrado	0.147409	Criterio Schwarz		−1.910999
Varianza de los errores	37.16798	Estadístico-F		3.377087
Estadístico Durbin-Watson	2.034235	Probabilidad del estadístico-F		0.024321

El promedio del costo por tonelada de las 30 plantas a las que se aplicó la encuesta fue de 267 000 pesos. Sin embargo, la función de costo presenta un valor inferior, lo que significa que se trabaja con un costo por encima del mínimo y, en última instancia, que se está subutilizando el factor capital

Lo que muestra la estimación es que el 82% de los costos totales está explicado por la materia prima y el 12% por el trabajo y el resto por los servicios y el capital.

La ecuación:

LTOTAL = 1.73770458 + 0.8273316518*LMTPRI2 +0.008831087031*LENTREP + 0.1211381115 *LLABOR + 0.0232822648*LPROD

Se expresa como antilogaritmo para que asuma la forma de función de Cobb-Douglas y queda así:

Antilogaritmo de LTOTAL = 5.684 $(MTPRI2)^{0.8273316518} (ENTREP)^{0.008831} (LABOR)^{0.121138} (PROD)^{0.023282}$

Función de costo total

$CT = w.L + r.K + \lambda(y- A.L^{\alpha}.K^{1-\alpha})$. Ésta es la ecuación general.

El costo mínimo es igual a las unidades del capital multiplicado por el precio del capital más las unidades del trabajo multiplicado por el precio del trabajo sometido a la restricción $\lambda(y- A.L^{\alpha}.K^{1-\alpha})$ donde $a+\beta = 1$, lo que significa que presenta rendimientos a escala constantes, es decir, al aumentar el uso de un factor la respuesta en el producto se hace en la misma proporción.

Para la función de costos del secado de yuca se tiene:

$CT = w.L + r.K + \lambda(y - \text{antilogaritmo}1.7377.L^{\alpha}.K^{1-\alpha})$

$CT = w.L + r.K + \lambda y - \lambda\text{antilogaritmo}1.7377.L^{\alpha}.K^{1-\alpha})$

Se deriva con relación al trabajo para hallar el costo marginal del factor trabajo; es decir el costo de utilizar una unidad adicional del factor trabajo y poder mostrar qué tanto se afecta el costo total con el aumento de esta unidad adicional.

$$\frac{\partial CT}{\partial L} = w - \alpha.\lambda\text{antilogaritmo}1.7377.L^{\alpha-1}.K^{1-\alpha})$$

$$\frac{\partial CT}{\partial L} = w - \alpha.\lambda 5.68 .L^{\alpha-1}.K^{1-\alpha}$$

Se deriva con relación al capital para hallar el costo marginal del factor capital y para mostrar qué tanto se afecta el costo total cuando se aumenta una unidad adicional del factor capital.

Derivada con relación a K

$$\frac{\partial CT}{\partial K} = r - \lambda\text{antilogaritmo}1.7377.(1-\alpha)\, L^{\alpha-1}.K^{1-\alpha}$$

$$\frac{\partial CT}{\partial K} = r - \lambda 5.68.(1-\alpha)\, L.K^{-\alpha}$$

Derivada con relación a λ

$$\frac{\partial CT}{\partial \lambda} = y - 5.68.L^{\alpha}.K^{1-\alpha}$$

$$\frac{w}{r} = \frac{\alpha.\lambda.\ 5.68L^{\alpha-1}K^{1-\alpha}}{\alpha.\lambda.\ 5.68(1-\alpha)LK^{-\alpha}} =$$

$$\frac{w}{r} = \frac{\alpha L.K}{(1-\alpha)} = \frac{\alpha.K}{L(1-\alpha)}$$

$$K = \frac{L.w(1-\alpha)}{\alpha.r}$$ Ésta es la senda de expansión

$$\frac{w}{r} = \frac{\alpha.K}{L(1-\alpha)} \quad L = \frac{\alpha.Kr}{w(1-\alpha)}$$

Remplazando en la ecuación de los datos de la estimación se tiene:

$\alpha = 0.1211381115$

$1\text{-}\alpha = 0.878861889$

$$L = \frac{0.1211381115\,K.r}{W\,(0.878861889)} = \frac{0.121138115\,K.r}{0.878861889\,w}$$

CÁLCULO DE LAS DEMANDAS DE FACTORES

La función de demanda del capital: significa las cantidades máximas que se deben demandar para minimizar el costo y maximizar la producción.

La función de demanda por capital queda así:

$Y = A.L^{\alpha}K^{1-\alpha}$

donde

A = constante el valor de Y cuando K y L son cero.

L = factor trabajo

K = factor capital

α y β = elasticidades de Y respecto a L y K respectivamente.

$$Y = A\left[\frac{0.1211381115\,Kr}{0.8778861889w}\right]^{0.1211381115} * \; K^{0.878861889}$$

$$Y = A\left[\frac{0.1211381115\,r}{0.8778861889w}\right]^{0.1211381115} * \; K$$

$$Y^{*}\left[\frac{(0.8778861889{*}w)^{0.1211381115}}{A\,(0.121138115{*}r)^{0.121138115}}\right] = \text{K función de demanda de capital}$$

• *La función de demanda del factor trabajo:* significa las cantidades máximas que se deben demandar de trabajo para poder minimizar el costo y maximizar la producción.

El cálculo de la función de demanda de trabajo queda como sigue:

$$Y = A.L^{\alpha}\left[\frac{Lw\,(1\text{-}\alpha)^{1-\alpha}}{\alpha\,.\,r}\right]$$

$$Y = A.L\left[\frac{(0.8778861889)^{0.8778861859}}{0.121138115 * r}\right]$$

$$L = Y\left[\frac{(0.121138115{*}r)^{0.8778861859}}{A\,(0.8778861889{*}w)}\right] \text{función de demanda para el trabajo.}$$

• *La función de costos*: una vez conocidas las cantidades máximas de trabajo y capital que maximizan la producción y minimizan el costo se procede a hallar la función de costos, para lo cual es necesario sustituir en la ecuación la demanda de trabajo y la demanda de capital. Igualmente ya se conocen los precios de cada uno de los factores de producción para remplazar en la función de costos una vez hallada.

La función de costos se encuentra sustituyendo la demanda de trabajo y capital en la ecuación:

$CT = w{*}L + r{*}K$

$$CT = w\left[\frac{Y}{A}\left(\frac{0.121138115\,.r}{0.878861889\,.\,w}\right)^{0.878861889}\right] \quad +$$

$$CT = w\left[\frac{Y}{A}\left(\frac{0.878861889.w}{0.121138115\,.\,r}\right)^{0.121138115}\right]$$

$$CT = \frac{w\,.\,Y}{A}\;\frac{0.156}{0.893}\;\frac{r^{0.878861889}}{w^{0.8778861889}} +$$

$$r\;\frac{Y}{A}\;\frac{09845}{0.7744}\;\frac{w^{0,12113845}}{r^{0.121138115}}$$

$$CT = \frac{0.1747}{0.1737}{*}w^{0.121138115}Yr^{0.878861889} + \frac{1.2713}{0.17377}{*}r^{0.878881889}Yw^{0.121138115}$$

$CT = w^{\alpha}\; y\; r^{(1-\alpha)} + 7.32\; r^{(1-\alpha)}\; y\; w^{\alpha}$

$CT = w^{\alpha}\; y\; r^{(1-\alpha)}\; (1 + 7.32)$

$CT = 8.32\;[y\, w^{\alpha} r^{(1-\alpha)}]$

$CT = 8.32\;[y^{*}\; w^{0.121138115}\; r^{0.878861889}]$

En este paso se aplica el lema de Shepard en la ecuación inicial producto de la estimación lineal y luego se procede a remplazar en los diferentes precios de los factores de producción.

$CT = 5.684\,(MTPR)^{0.8273316518}(ENTREP)^{0.008831}\,(LABOR)^{0.121138}\,(PROD)^{0.023282}$

donde:

CT = costo total

MTPR = materia prima; ENTREP = servicios; LABOR = trabajo; PROD = producción de yuca.

Los exponenciales corresponden a los coeficientes estimados en la regresión.

$CT = 5.684\,(90\,000)^{0.8273316518}(34\,706)^{0.008831}\,(17\,000)^{0.121138}\,(1)^{0.023282}$

Los valores que aparecen entre paréntesis son 90 000 pesos colombianos que corresponden al precio de la tonelada de yuca fresca; costos de los servicios 34 706 pesos, incluida la administración; costos de mano de obra, 17 000 pesos, y el último valor es la producción de yuca seca expresada en toneladas. Igualmente remplazando con los precios de cada uno de los factores de producción se llega al costo mínimo de producción.

CT = 254 695.35 pesos. Éste es el costo mínimo de producir una tonelada de yuca seca.


Es necesario comentar que el promedio del costo por tonelada de las 30 plantas a las que se aplicó la encuesta fue de 267 000 pesos. Sin embargo, la función de costo presenta un valor inferior, lo que significa que se trabaja con un costo por encima del mínimo y, en última instancia, que se está subutilizando el factor capital representado en la infraestructura del secado.

Esta función permite simular los cambios que puedan presentarse en el uso de los insumos y en la producción para ver los cambios en el costo total.

La determinación de un costo mínimo está acompañada de un máximo en la función de producción, lo que genera aumentos en la producción cada vez que se utilizan unidades adicionales de factores de producción o cada vez que se aumenta la escala de producción.

CONCLUSIONES

La aplicación de la teoría neoclásica de la función de producción al caso específico del secado de yuca demuestra la validez de la teoría, toda vez que en este manejo matemático están implícitos conceptos como las isocuantas de producción y la senda de expansión.

El estudio muestra que a pesar de que el productor tiende a ser racional termina por subutilizar factores de producción, en este caso el capital, y trabajar con costos por encima del mínimo, comprometiendo la eficiencia y la competitividad.

Bibliografía complementaria

Beattie, Bruce R., *The Economics of Production Editorial*, John Wiley & Sons, 2002.

Centro Internacional de Agricultura Tropical (CIAT), *Proyecto integrado de yuca en la costa atlántica de Colombia*, Documento de Trabajo, núm. 139, octubre de 1994.

Dagum, Camilo, *Introducción a la ecomometría*, Siglo XXI Editores, México, 1974.

Ferguson, C., *Teoría microeconómica*, Fondo de Cultura Económica, México, 1987.

Nicholson, Walter, *Teoría microeconómica. Principios y aplicaciones*, México, McGraw-Hill, 1997.

Reed, Hertford, y James A. García, *La competitividad de la agricultura en las Américas*, Serie CIAT Economía e Impacto, Cali, Colombia, 1999.